Věta 1 (Brooksova)**.** *Buď G souvislý graf ruzný od úplného grafu a liché kružnice. Pak existuje obarvení G pomocí $\Delta(G)$ barev.*

Důkaz. Označme si $\Delta = \Delta(G)$. Dokažme nejprve tvrzení pro $\Delta \leq 2$. Pokud $\Delta = 1$, tak G je K_2 a věta platí, pokud $\Delta = 2$, tak G je cesta nebo kružnice, z nichž nejsou dvoubarevné pouze liché kružnice a věta také platí.

Nechť $\Delta \geq 3$ a předpokládejme, že $G = (V, E)$ je protipříklad věty s nejmenším počtem vrcholů. G tedy není uplný a jeho barevnost je $\Delta+1$. Ukažme nejprve, že G musí být 2-souvislý. Pokud by v G existovala artikulace a, podívejme se na každou z komponent G_i grafu $G - a$. Pokud komponenta G_i není úplným grafem nebo lichou kružnicí, existuje její obarvení pomocí Δ barev. V opačném případě je $\delta(G_i) = \Delta(G_i)$ (kružnice resp. úplný graf mají stupně všech vrcholů stejné), a protože alespoň jeden vrchol komponenty G_i je v G spojen s a, je $\Delta(G_i) < \Delta(G)$ a tedy každá komponenta $G - a$ je Δ-obarvitelná. Protože však v každé komponentě G_i může mít a nejvýše $\Delta - 1$ sousedů, můžeme jednotlivé komponenty obarvit tak, aby v žádné z nich neměl soused vrcholu a barvu Δ. G je tedy obarvitelné Δ barvami, což je spor.

Nyní tedy víme, že náš protipříklad G musí být 2-souvislý. Rozdělme situaci na 2 případy: buď existují vrcholy v, w takové, že nejsou spojeny hranou a zároveň jsou řezem v G, nebo nikoli. Pokud existují, rozdělme komponenty grafu $G - \{v, w\}$ na dvě (neprázdné) části a do obou přidejme vrcholy v a w. Tyto části si označme V_1 a V_2 a uvažme indukované podgrafy G_1 resp. G_2 grafu G na V_1 resp. V_2. Protože G_1 i G_2 nejsou úplné (mezi v a w nevede hrana), ale zároveň je $\Delta \geq 3$, vždy existují Δ-obarvení grafů G_1 a G_2. Teď nás ještě jednou čeká rozebrat dva následující případy. Pokud se stane, že mezi všemi Δ-obarveními G_1 existuje obarvení c_1 takové, že $c_1(v) \neq c_1(w)$, a zároveň existuje Δ-obarvení c_2 grafu G_2, že $c_2(v) \neq c_2(w)$, umíme přejmenovat barvy tak, aby barva v byla v obarveních c_1 i c_2 stejná a totéž pro w. Spojením těchto obarvení získáváme Δ-obarvení G. BÚNO tedy můžeme předpokládat, že takové c_1 neexistuje. To však nutně znamená, že v i w mají v G_1 alespoň $\Delta - 1$ sousedů, a tedy v G_2 má v i w souseda pouze jednoho. $\Delta \geq 3$, proto snadno nalezneme Δ-obarvení G_2 takové, že oba vrcholy i v G_2 dostanou stejnou barvu. Proto i tentokrát můžeme obarvení po vhodné permutaci barev spojit na celé G a obarvit ho tak Δ barvami.

Situace je tedy jasná, pokud má být G protipříklad, tak žádná dvojice vrcholů, které nejsou spojeny hranou, nemůže být řezem v G. Vyberme si libovolný vrchol u stupně Δ. Protože G není uplný, existují nějací jeho sousedé v, w, mezi nimiž nevede hrana. $\{v, w\}$ nemůže být řez, proto graf $G - \{v, w\}$ je souvislý, a proto existuje nějaká jeho kostra T. T je strom, zakořeňme si ho tedy v u. Přidělme vrcholům v a w barvu jedna a následně rozebírejme strom T odspodu a dávejme jeho vrcholům první volnou barvu. Vyjma kořene T (u) má každý takový vrchol nejvýše $\Delta - 1$ obarvených sousedů, takže si s Δ barvami vystačíme. A i na u jedna barva z Δ barev zbude, neboť nejvýše $\Delta - 2$ barev blokují sousedi z T a vrcholy v a w blokují barvu jedna. I v posledním případě jsme tedy úspěšně obarvili G pomocí Δ barev, což je spor s tím, že jeho barevnost je $\Delta + 1$. Brooksova věta je tak dokázána. $\square$