

## Kombinatorika a grafy III – 1. série domácích úkolů

Pro získání zápočtu je potřeba z **každé** série domácích úkolů vyřešit správně alespoň 1/3 úloh. Studenti kombinovaného studia, kteří se neúčastní cvičení, potřebují z každé série vyřešit alespoň 2/3 úloh. Řešení vysázené pomocí programu určeného pro sazbu matematiky (např.  $\text{\TeX}$ ) zasílejte do **úterý 6.12. 15:39** na email *volec@kam.mff.cuni.cz*, případně ho můžete odevzdávat osobně na cvičení (pak samozřejmě můžete odevzdat řešení napsané rukou; důrazně však žádám o nezasilání fotek/scanu rukou psaného řešení emailem). Budete-li mít jakýkoli dotaz k zadání, ozvěte se mi na výše uvedený email.

**Úloha 1.** Bud'  $G = (V, E)$  graf a  $W \subseteq V$  množina vrcholů velikosti větší než  $k + 1$ .

- a) Ukažte, že má-li  $G$  stromovou šířku  $k$ , potom v  $G$  existuje vrcholový řez  $C$  velikosti nejvýše  $k + 1$  takový, že každá komponenta  $G \setminus C$  obsahuje nejvýše  $|W|/2$  vrcholů z  $W$ .
- b) Pomocí části (a) zkonstruujte polynomiální algoritmus, který pro graf  $G$  buď nalezne stromový rozklad šířky  $3k + 2$ , nebo odpoví, že  $G$  má stromovou šířku větší než  $k$ .

**Úloha 2.** Nalezněte algoritmus, který pro  $n$ -vrcholový graf  $G$  se stromovou šířkou (nejvýše)  $k$  spočte v čase  $O(n)$  počet všech perfektních párování v  $G$ . Můžete předpokládat, že stromový rozklad  $G$  šířky  $k$  je součástí zadání.

**Úloha 3.** Bud'  $G$  graf na  $n$  vrcholech a necht'  $\alpha$  je velikost největší nezávislé množiny v  $G$ . Dokažte, že  $G$  obsahuje  $K_{\lceil n/(2\alpha-1) \rceil}$  jako minor.