

## Kombinatorika a grafy III – 2. série domácích úkolů

Pro získání zápočtu je potřeba z **každé** série domácích úkolů vyřešit správně alespoň 1/3 úloh. Studenti kombinovaného studia, kteří se neúčastní cvičení, potřebují z každé série vyřešit alespoň 2/3 úloh. Řešení vysázené pomocí programu určeného pro sazbu matematiky (např.  $\text{\TeX}$ ) zasílejte do **úterý 3.1. 15:39** na email *volec@kam.mff.cuni.cz*, případně ho můžete odevzdávat osobně na cvičení (pak samozřejmě můžete odevzdat řešení napsané rukou; důrazně však žádám o nezasílání fotek/scanu rukou psaného řešení emailem). Budete-li mít jakýkoli dotaz k zadání, ozvěte se mi na výše uvedený email.

---

### Značení a definice používané v této sérii:

Pro graf  $G = (V, E)$  řekneme, že rozklad  $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_l)$  tvoří  $\varepsilon$ -regulární rozklad jeho množiny vrcholů, pokud platí

- $|V_0| < \varepsilon|V|$  a  $|V_i| = |V_j|$  pro každé  $1 \leq i, j \leq l$ ,
- všechny až na  $\varepsilon l^2$  dvojic  $(V_i, V_j)$  pro  $1 \leq i, j \leq l$  tvoří  $\varepsilon$ -regulární pár.

Dále pro  $\varepsilon$ -regulární rozklad  $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_l)$  grafu  $G$  a číslo  $d \in [0, 1]$  definujme  $\varepsilon$ -rozkladový graf  $R$  s hraniční hustotou  $d$  následujícím způsobem:

- $V(R) = [l] = \{1, 2, \dots, l\}$
- $\{i, j\} \in E(R)$  právě tehdy když dvojice  $(V_i, V_j)$  tvoří  $\varepsilon$ -regulární pár, a počet hran mezi  $V_i$  a  $V_j$  v  $G$  je alespoň  $d \cdot |V_i||V_j|$ . Jinými slovy,  $(V_i, V_j)$  má hustotou alespoň  $d$ .

Pro libovolný graf  $G$  definujme jeho  $s$ -nafouknutí jako graf  $G_s$ , který vznikne z  $G$  nahrazením každého jeho vrcholu nezávislou množinou velikosti  $s$  a každé jeho hrany úplným bipartitním grafem  $K_{s,s}$ . Jinými slovy,  $V(G_s) = V(G) \times [s]$  a  $\{(u, i), (v, j)\}$  je hrana  $G_s$  právě tehdy, když  $\{u, v\}$  je hrana  $G$ ,  $i \in [s]$  a  $j \in [s]$ .

---

### Úloha 1. *Varianty Removal lemmatu.*

- Pro každý bipartitní graf  $H$  dokažte Removal lemma pro  $H$ , tj. že ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pokud  $G$  obsahuje méně než  $\delta n^{|H|}$  kopií grafu  $H$ , tak lze v  $G$  najít množinu hran  $X$ ,  $|X| < \varepsilon n^2$ , takovou, že  $G$  bez  $X$  neobsahuje  $H$  jako podgraf.
- Dokažte Removal lemma pro úplný graf na pěti vrcholech ( $K_5$ ), tj. že ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pokud  $G$  obsahuje méně než  $\delta n^5$  kopií grafu  $K_5$ , tak lze v  $G$  najít množinu hran  $X$ ,  $|X| < \varepsilon n^2$ , takovou, že  $G$  bez  $X$  neobsahuje  $K_5$  jako podgraf.

**Úloha 2.** *Regularity lemma je (téměř) trivialní pro řídké grafy.*

- Dokažte, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $d > 0$  takové, že každý bipartitní graf s oběma partitami velikosti  $n/2$  a s nejvýše  $dn^2$  hranami tvoří  $\varepsilon$ -regulární pár.
- Dokažte, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $d > 0$  takové, že každý graf na  $n$  vrcholech a s nejvýše  $dn^2$  hranami obsahuje nejvýše  $\varepsilon n$  vrcholů stupně alespoň  $\varepsilon n$ .
- buď  $\mathcal{C}$  nekonečná třída grafů, kde každý graf z  $\mathcal{C}$  na  $n$  vrcholech má nejvýše  $c(n) \cdot n^2$  hran pro nějakou funkci  $c(n)$  splňující  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = 0$ . Bez použití SRL ukažte, že pro každé  $\varepsilon > 0$  a  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $K \in \mathbb{N}$  a  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že každý graf z  $\mathcal{C}$  na alespoň  $n_0$  vrcholech má  $\varepsilon$ -regulární rozklad na  $l$  částí, kde  $k \leq l \leq K$ .

**Úloha 3 (\*)**. *Vnořování grafů s omezeným maximálním stupněm.*

- Ukažte, že pro každé  $d > 0$  a  $\Delta \in \mathbb{N}$  existuje  $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(d, \Delta)$  takové, že pro libovolné  $m \in \mathbb{N}$  a  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  platí, že
  - $\frac{1}{2}d^\Delta \cdot m \geq \varepsilon \cdot m$  a
  - $((d - \varepsilon)^\Delta - \Delta\varepsilon) \cdot m \geq \frac{1}{2}d^\Delta \cdot m$ .
- Dokažte, že pro daná  $d > 0$ ,  $\Delta \in \mathbb{N}$  a  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(d, \Delta)$ , kde  $\varepsilon_0$  je stejné jako v části (a), platí následující. Pokud
  - $G$  je graf,  $(V_0, V_1, \dots, V_l)$  jeho  $\varepsilon$ -regulární rozklad a  $m := |V_1| = \dots = |V_l|$ ,
  - $R$  příslušný  $\varepsilon$ -rozkladový graf  $G$  s hraniční hustotou  $d$ ,
  - $R_s$   $s$ -nafouknutí  $R$  pro  $s \leq \frac{1}{2}d^\Delta \cdot m$ ,
  - $H$  libovolný podgraf  $R_s$  s maximálním stupněm  $\Delta(H) \leq \Delta$ ,

potom  $H$  je podgraf  $G$ .

*Hint: Libovolně uspořádejte vrcholy  $H$  a po jednom je vnořujte do  $G$ . Ke každému dosud nevnořenému vrcholu  $H$  si udržujte seznam možných kandidátů v  $G$ , kteří jsou konzistentní s dosud vnořenou částí  $H$ . Při vnořování nějakého vrcholu  $v \in H$  vyberte vrchol z jeho kandidátské množiny. Ten je potřeba zvolit šikovně, aby se kandidátské množiny pro sousedy  $v$ , kteří budou vnořeni až po  $v$ , příliš nezmenšily.*

- Pomocí SRL vyvodte z části (b), že pro každé  $d > 0$ ,  $\Delta \in \mathbb{N}$  a  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(d, \Delta)$  existuje  $C := C(d, \Delta, \varepsilon)$  takové, že platí následující. Má-li graf  $G$  alespoň  $Cn$  vrcholů a pro nějaký jeho  $\varepsilon$ -regulární rozklad obsahuje příslušný  $\varepsilon$ -rozkladový graf s hraniční hustotou  $d$  graf  $K_{\Delta+1}$  jako podgraf, potom  $G$  obsahuje všechny grafy  $H$  s  $n$  vrcholy a maximálním stupněm  $\Delta$  jako podgrafy.